MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Hubert Lacoin, Matthieu Lerasle

Coefficient : 2

Durée : 1 heure de préparation + 30minutes de passage.

Calculatrice interdite

1. Commentaires généraux

L'impression générale du jury sur cet oral est moins bonne que pour 2013. La moyenne s'établit à 10 contre 11.4 l'année dernière (avec des critères de notation similaires malgré le changement de composition du jury). Si deux excellents candidats ont obtenu la note maximale de 20/20 avec des prestations qui témoignaient une grande maîtrise des outils mathématiques étudiés, les très bons et bons candidats nous ont semblé moins nombreux. De plus, nous déplorons que 12 candidats (soit vingt pour-cent des admissibles) aient obtenu des notes inférieures ou égales à 6/20, ce qui témoigne de grosses lacunes sur des notions élémentaires du programme. L'écart-type s'élève à 4.27 et est comparable à celui des autres disciplines.

Comme à l'habitude, chaque planche était constituée de deux exercices totalement indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités statistiques), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court avec un plus difficile ou long), et originalité. Nous avons choisi cette année de proposer dans de nombreuses planches des exercices assez classiques, en particulier en algèbre linéaire où les candidats ont parfois plus de difficultés avec le formalisme. Nous avons alors fréquemment couplé cet exercice proche de ce que les élèves ont pu traiter en classe avec un autre plus original.

Nous insistons sur le fait que la reprise est très importante pour la détermination de la note : un candidat ayant bloqué dès les premières questions d'un exercice pourra largement atteindre la moyenne s'il réussit à bien exploiter les indications données par le jury et montre une bonne maîtrise des notions essentielles du programme. Par ailleurs les questions des exercices étant en général posées dans un ordre de difficulté croissant, nous conseillons aux candidats de bien se concentrer sur les premières questions avant d'aborder les suivantes. Sur certaines planches, le traitement correct des deux premières questions de chaque exercice pouvait d'ailleurs rapporter une excellente note.

2. Déroulement de l'oral

Dans l'ensemble, le déroulement de l'oral (présentation synthétique des résultats obtenus lors de la préparation, en 10 minutes maximum, puis reprise avec le jury) est très satisfaisant, et donne l'opportunité à tout candidat de bien montrer tout ce qu'il sait faire dans les deux exercices proposés. Certains candidats pourraient toutefois améliorer leur prestation en faisant attention aux points suivants :

— Si en général, il est conseillé de ne pas trop rentrer dans les détails de calculs lors de la préparation, il est toujours judicieux de présenter de manière concise les étapes importantes du raisonnement. Ceci à plus forte raison quand la question posée est du type "montrer que l'égalité A est vérifiée". Certains candidats ont eu du mal

à trouver le bon équilibre, détaillant parfois excessivement des calculs simples ou passant sous silence des points clés.
— Certains candidats n'ayant traité que peu de questions en préparation ont fait un peu traîner en longueur la présentation pour remplir mieux les dix minutes. Nous rappelons qu'une présentation plus courte n'est pas pénalisée et qu'elle laisse simplement plus de temps au candidat pour améliorer sa note lors de la reprise.
— Nous encourageons les candidats à se méfier de l'impression qu'ils ont de leur prestation, qui ne reflète pas forcément fidèlement leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un candidat ne doit jamais se démobiliser en croyant par erreur avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices.

3. Conseil aux candidats

Le jury cherche à évaluer le plus justement les candidats et n'essaiera jamais de les "piéger". En général, lorsque le candidat est laissé sans indication, c'est que le jury estime qu'il est sur une bonne piste. Il est donc inutile, voire contre-productif pour le candidat de chercher l'acquiescement du jury à chaque étape du raisonnement.

Nous encourageons les candidats à écrire au tableau, surtout les indications données à la reprise. Les formules mathématiques énoncées oralement peuvent être ambivalentes et la simple écriture au tableau permet par exemple au jury de rectifier une erreur d'interprétation du candidat.

Nous encourageons les candidats à se méfier des 'demi-souvenirs' qui peuvent amener à énoncer des énormités. Quand les candidats choisissent d'introduire une nouvelle notation absente de l' énoncé, nous attirons leur attention sur le fait que ce choix doit être judicieux, et ne pas prêter à confusion. Par exemple, éviter la notation P lorsque p est déjà utilisé, les deux sont indiscernables au tableau (et souvent aussi à l'oral !).

4. Commentaires sur les planches

Planche 1 Le premier exercice proposait d'étudier des transformations continues de variables exponentielles. Il a été souvent traité dans sa globalité. La moitié des candidats ont su déterminer la loi de telles variables dès la préparation, les autres y sont parvenus après indications du jury. Nous avons constaté que tous les candidats avaient des problèmes pour vérifier la convergence des intégrales des fonctions puissances. Le calcul effectif de ces intégrales était plutôt bien mené par contre. Tous les candidats ont rencontré des problèmes avec le support des variables.

Le second exercice portait sur l'étude de polynômes trigonométriques. Le traitement du sujet s'est limité essentiellement aux deux premières questions. La plupart des candidats ont bien traité la première question en préparation. Dans la seconde question, la difficulté était d'exprimer le produit $\cos(kx)\cos(jx)$ en fonction de $\cos((k+j)x)$ et $\cos((k-j)x)$, ce qu'un seul candidat avait bien fait en préparation. Les candidats n'ont pas pensé à traiter séparément le cas $j = k$.

Planche 2 Le premier exercice reposait sur la formule de Bayes. Il ne présentait pas de difficultés particulières, il s'agissait seulement de mener soigneusement des calculs élémentaires. La moitié des candidat n'ont pas répondu à la première question en préparation. l'étude des variations d'une fraction rationnelle a posé aussi de gros problèmes.

Le second exercice, original et technique, proposait de construire une approximation ponctuelle d'une fonction en minimisant un critère quadratique. Il a été peu abordé en préparation, même si plusieurs candidats ont su remarquer que la question 2 devait utiliser un développement de Taylor. Ces candidats ont su, avec l'aide du jury, formaliser cette intuition à la reprise. La question 3 a été abordée à la reprise seulement. Le jury a apprécié la faculté des candidats à calculer les dérivées partielles de la fonction Q_x. Il restait ensuite trop peu de temps pour aller plus loin dans l'énoncé, et traiter les questions d'algèbre linéaire qui restaient.

Planche 3 Le premier exercice, classique, proposait aux candidats de construire les polynômes d'interpolation de Lagrange. Tous les candidats ont réussi à montrer que la famille de polynômes proposée dans l'énoncé était libre en évaluant une combinaison linéaire nulle en les a_i. Un bon candidat a traité l'exercice dans son intégralité. Nous rappelons que a est racine du polynôme signifie que $P(a) = 0$.

Seules les deux premières questions du second exercice ont été abordées. Elles ont donné l'occasion au jury de tester les connaissances des candidats sur le cours de trigonométrie et sur la définition de la partie entière.

Planche 4 Le premier exercice proposait de dénombrer les chemins de longueurs n dans un graphe à partir de la matrice d'adjacence de celui-ci. L'exercice était original et la notation $\{a, b\}$ a perturbé les candidats qui ont tous considéré les couples. A la reprise, le jury a pu corriger ce problème et tester les raisonnements des candidats sur les cas $n = 2$ et $n = 3$. Le jury a apprécié que tous les candidats sachent calculer rapidement et correctement un produit de matrices $3 * 3$.

Le second exercice proposait d'étudier les intégrales de Wallis pour obtenir une suite de rationnels convergeant vers π. Les candidats se sont beaucoup mieux débrouillés sur ce sujet bien plus classique, notamment, tous les candidats savaient faire correctement une intégration par parties. Nous avons toutefois été surpris des difficultés pour dériver les fonctions de la forme $u^n(x)$ ou pour formaliser de bonnes intuitions sur le calcul de limites.

Planche 5 Le premier exercice traitait des relations classiques entre les lois binomiales et Poisson. Il s'agissait essentiellement d'appliquer la formule des probabilités totales et de reconnaitre la série exponentielle. Il a posé des problèmes dès la première question, notamment sur la formalisation de la question posée (transformer le "sachant" en une probabilité conditionnelle). La plupart des candidats n'a pas remarqué que la probabilité demandée était non-nulle seulement si $k \leq n$. Une fois le formalisme mis en place, 2 candidats ont su montrer que X suivait une loi de Poisson en effectuant le changement de variables dans la somme.

Le second exercice, original, n'a quasiment pas été abordé par les candidats. Il a essentiellement servi de support à des questions de cours.

Planche 6 Le premier exercice, plutôt original, proposait une preuve de l'irrationalité de e. Il suffisait de connaître la définition de la série exponentielle pour résoudre l'exercice. La moitié des candidats a peiné à réduire au même dénominateur une somme de fractions pour montrer la décroissance de V. Dans l'ensemble les candidats ont su répondre à la question 2, soit lors de la préparation, soit sur l'indication du jury de penser à la loi de Poisson. La question 3 était clairement la plus difficile. 2 candidats l'ont abordée sérieusement pendant la reprise.

Cet exercice de statistique, très classique, a plutôt été mieux réussi que des exercices analogues posés l'année précédente. En particulier, le jury a apprécié que les candidats sachent donner un estimateur de δ et calculer son biais. En revanche, les 3 candidats ayant tenté de calculer la variance ont utilisé le résultat $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$, et ont eu beaucoup de difficultés à corriger cette erreur à la reprise. Deux candidats ont à peu près su définir un intervalle de confiance, mais personne n'est allé plus loin.

Planche 7 Le premier exercice, classique, donnait l'occasion de manipuler des notions importantes comme les applications linéaires, les isomorphismes et le lien entre une application linéaire et sa matrice dans une base. Les candidats maîtrisaient dans l'ensemble ces notions de base. Ils ont en revanche en majorité eu beaucoup de mal à inverser l'application qui à $P(X)$ associe $P(X+1)$, même à la reprise.

Le second exercice, original, proposait l'étude d'une suite aléatoire de vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Il s'agissait de montrer la convergence de cette suite à l'aide d'arguments élémentaires. Le jury a apprécié qu'un excellent candidat traite la quasi-totalité de l'exercice dès la préparation. Aucun candidat n'a paru déstabilisé par le caractère inhabituel de l'exercice, en particulier tous ont abordé la première question et ont ouvert la discussion avec le jury pour la reprise.

Planche 8 Le premier exercice proposait une étude du comportement asymptotique de la série harmonique. Les candidats ont en général pensé aux critères de comparaison série-intégrale pour répondre à la première question. Ils maîtrisaient en général très mal les équivalents. Il a fallu parfois insister longuement avant d'en obtenir la définition. Nous recommandons aux futurs candidats de se référer à une telle définition plutôt que d'évoquer des recettes douteuses.

Le second exercice portait sur l'étude d'un modèle simple de reproduction asexuée. L'exercice, original, n'a pas déstabilisé les candidats. Il a offert au jury la possibilité de discuter autour des notions de probabilité conditionnelle et d'inégalité de Markov. La première question a en général été traitée lors de la préparation de manière satisfaisante. Les candidats ont formulé de bonnes intuitions pour les questions suivantes qui ont pu être discutées à la reprise.

Planche 9 Le premier exercice portait sur l'étude des projecteurs. Il s'agissait essentiellement d'appliquer la définition d'espaces supplémentaires. Il a été très mal traité par les candidats en préparation, et s'est résumé pour l'essentiel à des questions de cours à la reprise, en insistant sur l'unicité de la décomposition pour montrer la linéarité de l'application. La maîtrise des questions de cours s'est révélée nettement insuffisante et les erreurs de logique très nombreuses. Les candidats confondaient par exemple, complémentaires et supplémentaires, vecteurs et espaces vectoriels, intersection et union.

Le second exercice traitait du problème de ruine du joueur dans une succession de jeux de pile ou face biaisé. La question 1 était élémentaire et permettait de vérifier la bonne lecture de l'énoncé. Les questions suivantes ont été très peu abordées en raison de la grande difficulté des candidats à ébaucher un raisonnement probabiliste. Le jury souhaite insister sur la nécessité de formaliser l'énoncé dans ce type d'exercice. En particulier, il est illusoire de croire qu'on peut traiter ce genre de problème sans décrire précisément les évènements dont on souhaite calculer les probabilités.

Planche 10 Le premier exercice était un classique d'algèbre linéaire qui ne présentait pas de difficultés particulières mais nécessitait de mener soigneusement quelques calculs simples. L' inversibilité de la matrice triangulaire supérieure obtenue à la question 2 n'a en général pas été bien justifiée. Le jury n'a pas pu déterminer le sens du mot "étagé" après interrogation des candidats et souhaiterait que ceux-ci utilisent le moins possible cette notion. A la question 5 deux candidats au moins ont confondu $f^{-1}(P(0))$ et $f^{-1}(P)(0)$.

L'exercice de probabilité a été assez peu abordé par les candidats. Ceux-ci ont eu beaucoup de mal à simplifier des fractions de type $n!/(n+a)!$ et à regrouper des produits avec a facteurs dans la question 2. Le jury a aussi été assez déçu de plusieurs réponses à la question 1 sur la loi binomiale. De plus, aucun candidat n'a mentionné le théorème de la limite centrale pour proposer une piste dans la question 4.

Planche 11 L'exercice d'algèbre linéaire était ici complètement élémentaire et a dans l'ensemble été bien traité par les candidats dès la préparation. Notons que sur un exercice aussi simple, le jury s'attend à ce que les candidats exposent rapidement les éléments clés de leur raisonnement.

Le second exercice proposait une initiation à l'estimation non-paramétrique en statistique, utilisant de l'analyse harmonique. Les deux premières questions sur les formules trigonométriques ont été bien traitées par les candidats à la satisfaction du jury. Les formules obtenues ont été assez bien exploitées dans la question 3. Il fallait toutefois prendre garde à ne pas diviser pas 0 dans cette question, ce qu'un seul candidat avait fait en préparation. Deux très bons candidats ont pu obtenir à la reprise la formule de la question 5, ce qui démontrait une grande aisance technique.

Planche 12 Le premier exercice proposait d'étudier la limite d'une suite de racines de polynômes. Il fallait utiliser le "théorème de la bijection" pour résoudre la première question. Les candidats n'ont en général pas pensé seuls à utiliser ce résultat qui était globalement mal connu. Comme dans d'autres exercices, les candidats ont eu beaucoup de difficultés liées à l'utilisation simultanée des paramètres n et x.

Le second exercice proposait de montrer que la loi du nombre de points fixes d'une permutation choisie uniformément converge vers une loi de Poisson. La plupart des élèves n'ont pas compris l'énoncé. l'interrogation s'est alors limitée au cas $n = 3$ de la première question. Le jury tient à féliciter l'excellent candidat qui a résolu intégralement l'exercice.

Planche 14 l'exercice de probabilité proposait d'étudier un modèle simple de stratégie de réponses aléatoires à un QCM. Il s'agissait en fait de remarquer qu'il suffisait d'étudier la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre n et $1/2$ soit inférieure ou égale à $n/2 - 1$. Les difficultés principales des candidats ont été comme souvent de modéliser correctement le problème en posant les bonnes variables aléatoires de Bernoulli. Plusieurs candidats ont aussi connu des problèmes pour faire des changements d'indices dans des sommes.

Le second exercice proposait de minimiser une fonctionnelle quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$. Les candidats n'ont pas abordé cette partie de l'exercice. Les 3 premières questions d'algèbre linéaire, élémentaires, ont en revanche été convenablement traitées.

Planche 15 Le premier exercice proposait de diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une base orthonormée. Les 2 premières questions, élémentaires, ont été globalement bien traitées par la plupart des candidats. La 4ème question, plus difficile, n'a été complètement résolue que par un excellent candidat, à la reprise.

Le second exercice proposait d'étudier une famille de normes sur l'ensemble des polynômes. La seconde question a posé de gros problèmes, la majorité des candidats souhaitant utiliser l'inégalité des accroissements finis qui n'était ici d'aucune utilité et qui a souvent été énoncée de manière erronée. Dans cette question, il s'agissait essentiellement d'utiliser la positivité de l'intégrale. Les candidats n'ont en général pas su énoncer ou vérifier correctement les hypothèses sous lesquelles les inégalités qu'ils utilisaient étaient valides.

Planche 16 Le premier exercice proposait de vérifier la continuité et la dérivabilité d'une fonction prolongée en 0. Il s'agissait essentiellement d'appliquer la définition de la dérivabilité et d'utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2. La dernière question demandait de traduire une propriété géométrique élémentaire et d'appliquer le théorème de Rolle. Les candidats ont en général bien pensé à la définition de la dérivabilité. Il a en revanche été très difficile d'obtenir une formule de Taylor-Young écrite correctement. Le théorème de Rolle a été la plupart du temps cité par les candidats qui ont eu de grandes difficultés à identifier la fonction à laquelle l'appliquer.

Le second exercice proposait de construire une suite de polynômes vérifiant une certaine équation fonctionnelle pour ensuite en identifier les racines. La moitié des candidats a pensé à isoler le terme de plus haut degré et a pu à la reprise construire la suite Q_n par récurrence. Aucun candidat n'a abordé sérieusement la dernière question.

Planche 17 Le premier exercice était un classique d'algèbre linéaire dans lequel il fallait déterminer la puissance n-ième d'une matrice $3 * 3$. Il suffisait pour le résoudre de savoir proprement faire un produit de matrices et de trouver la forme du terme général d'une suite arithmético-géométrique. L'astuce proposée dans l'énoncé d'utiliser la matrice B n'a pas été exploitée par les candidats. Encore une fois, il est décevant de constater que les candidats préfèrent plaquer des formules apprises, souvent en se trompant, que de refaire un raisonnement simple.

Le second exercice, qui proposait de démontrer les inégalités de Minkowski et de Hölder, était un grand classique de l'analyse. La majorité des candidats a buté sur la première question qui se résolvait pourtant en étudiant une fonction simple. L'utilisation de la question 1 pour résoudre la seconde a posé de gros problèmes à la reprise.